

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 24.01.2023

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

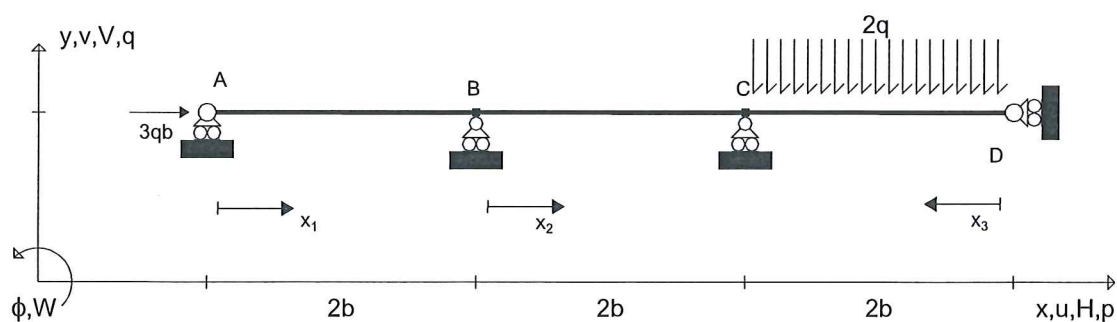
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A , φ_A

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 24.01.23*001



EQ. DI CONVENIENZA $\Delta\varphi_B = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

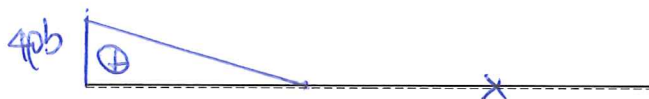
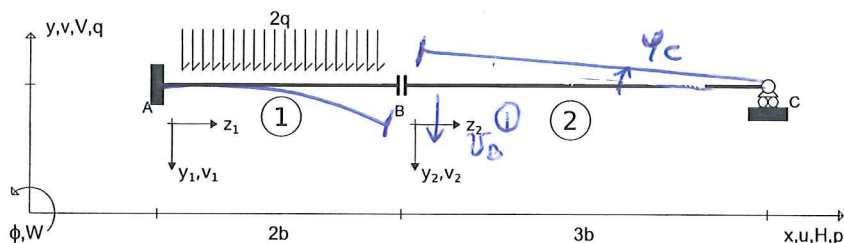
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

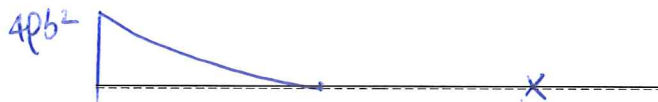
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B relativo al primo tratto, $v_B^{(1)}$.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 24.01.23*001



$\uparrow \oplus \downarrow$



$\curvearrowright \oplus \curvearrowleft$

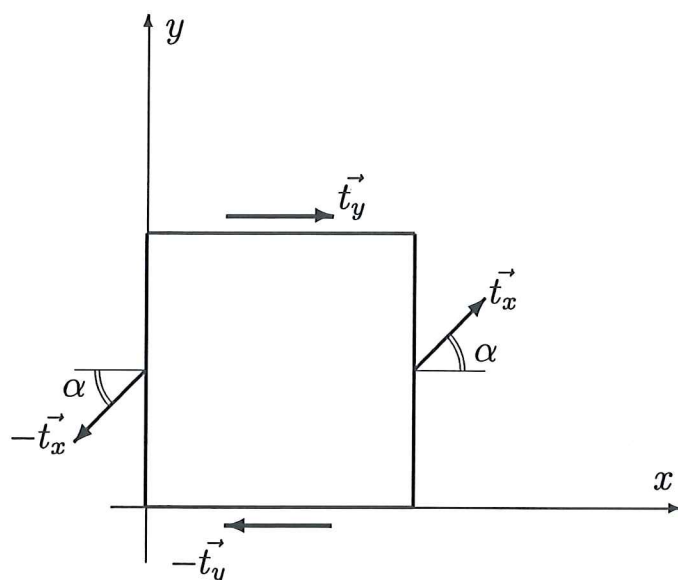
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 4pb; & M_A (\curvearrowright) &= 4pb^2; & V_C (\uparrow) &= 0; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 4pb - 2qz_1; & M_{AB} &= -4pb^2 + 4pbz_1 - qz_1^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 0; & M_{BC} &= 0; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0, \quad v_1'(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1'(z_1=2b)=v_2'(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= v_2(z_2=3b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(2pb^2z_1^2 - \frac{2}{3}pbz_1^3 + \frac{1}{12}qz_1^4 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(4pb^2z_1 - 2pbz_1^2 + \frac{1}{3}qz_1^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{8}{3}pb^3z_2 - 8pb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{8}{3}pb^3 \right); \\
 v_B^{(1)} &= \frac{4pb^4}{EI} \quad (\downarrow); & \varphi_C &= \frac{8pb^3}{3EI} \quad (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 240^\circ$ (sicché $\cos \alpha = -1/2$; $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$) e ha modulo di valore $|t_x| = 50$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

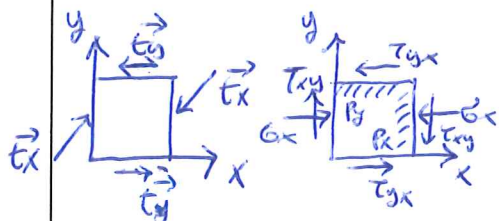
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = -25,000$ (MPa); $\sigma_y = 0,000$ (MPa); $\tau_{xy} = -43,013$ (MPa);

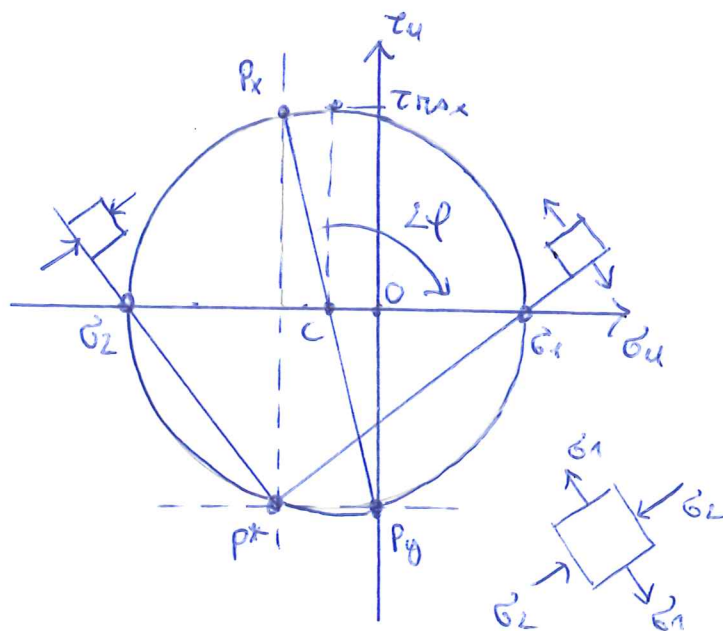
$\sigma_1 = 32,568$ (MPa); $\sigma_2 = -57,568$ (MPa); $\tau_{\max} = 45,068$ (MPa);

cerchio di Mohr:

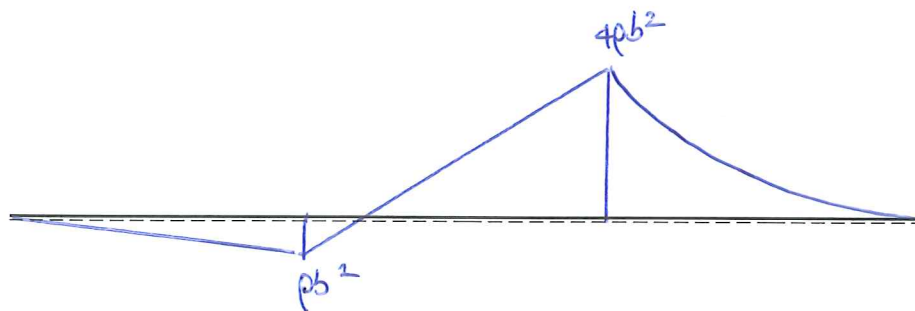
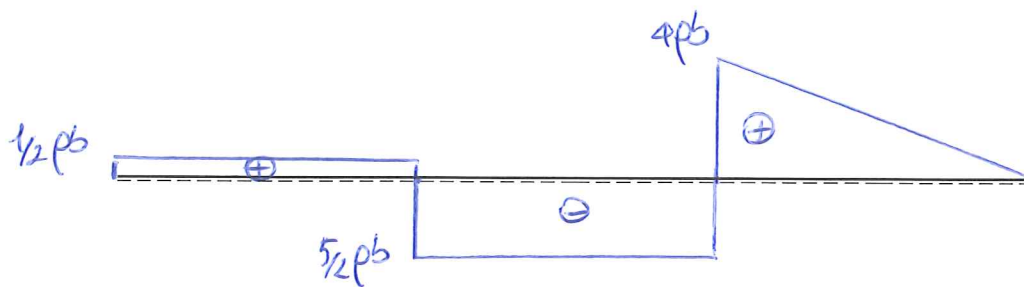
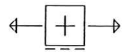


$P_x = (-25,000; 43,013)$

$P_y = (0,000; -43,013)$



$\varphi = -53,051$ (°);



$$\begin{aligned}
 V_A(\uparrow) &= \frac{1}{2}qb & V_B(\uparrow) &= -\frac{5}{2}qb & V_C(\uparrow) &= \frac{1}{2}qb & H_D(\rightarrow) &= -\frac{3}{2}qb & M_B(\curvearrowright) &= -\frac{1}{2}qb^2 \\
 N_{AB} &= -\frac{3}{2}qb & T_{AB} &= \frac{1}{2}qb & M_{AB} &= \frac{1}{2}qb \times b \\
 N_{BC} &= -\frac{3}{2}qb & T_{BC} &= -\frac{5}{2}qb & M_{BC} &= qb^2 - \frac{5}{2}qb \times b \\
 N_{DC} &= -\frac{3}{2}qb & T_{DC} &= \frac{1}{2}qb & M_{DC} &= -\frac{1}{2}qb^2 \\
 \varphi_A &= -\frac{qb^3}{3EI} \quad (2.)
 \end{aligned}$$

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B .

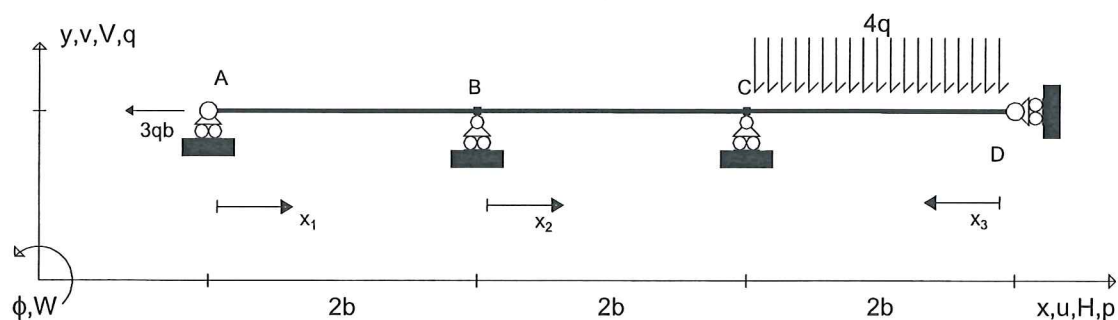
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A , φ_A

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 24.01.23*002



EQ. DI GOVSNENT $\Delta\varphi_B = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

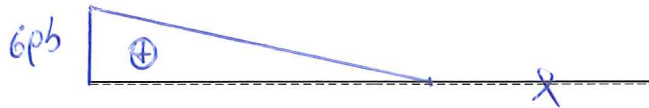
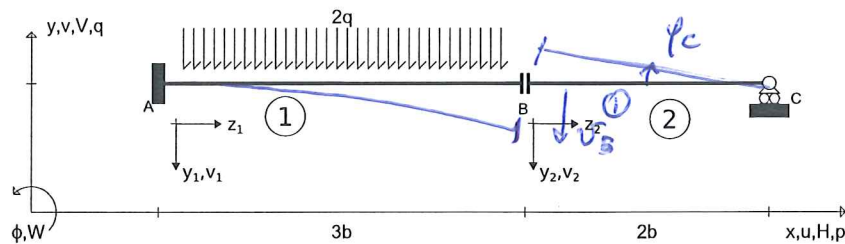
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

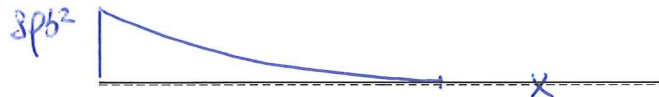
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B relativo al primo tratto, $v_B^{(1)}$.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 24.01.23*002



$\uparrow \boxed{+} \downarrow$



$\circ \boxed{+} \circ$

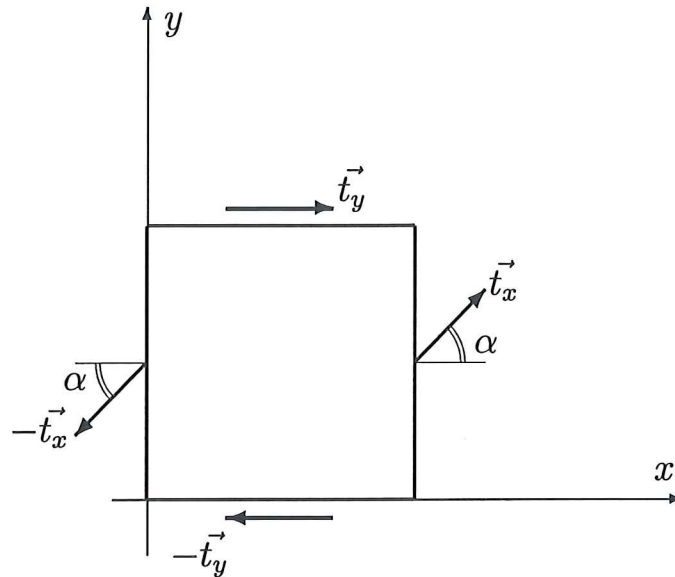
$H_A (\Rightarrow) = 0$	$V_A (\uparrow) = 6pb$	$M_A (\circlearrowleft) = 3pb^2$	$V_C (\uparrow) = 0$
$N_{AB} = 11$	$T_{AB} = 6pb - 2qz_1$	$M_{AB} = -3pb^2 + 6qbz_1 - qz_1^2$	
$N_{BC} = 11$	$T_{BC} = 11$	$M_{BC} = 11$	
c.c in A = $v_1(z_1=0)=0; v_1'(z_1=0)=0$			
c.c in B = $v_1'(z_1=3b) = v_2'(z_2=0)$			
c.c in C = $v_2(z_2=2b)=0$			
$v_1(z_1) = \frac{1}{EI} (\frac{9}{2} pb^2 z_1^2 - qb z_1^3 + \frac{1}{12} q z_1^4)$	$v_1'(z_1) = \frac{1}{EI} (3pb^2 z_1 - 3qb z_1^2 + \frac{1}{3} q z_1^3)$		
$v_2(z_2) = \frac{1}{EI} (3pb^2 z_2 - 18pb^4)$	$v_2'(z_2) = \frac{1}{EI} (3pb^2)$		
$v_B^{(1)} = \frac{81pb^4}{4EI} \quad (\downarrow)$	$\varphi_C = \frac{3pb^2}{EI} \quad (\downarrow)$		

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 300^\circ$ (sicché $\cos \alpha = 1/2$; $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 50$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

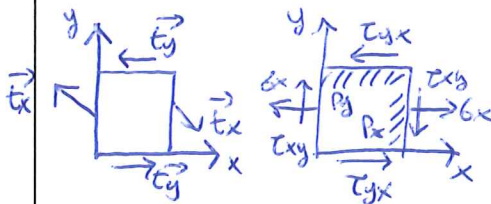
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 25,000 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -43,013 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 57,568 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -32,568 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 45,068 \text{ (MPa)};$$

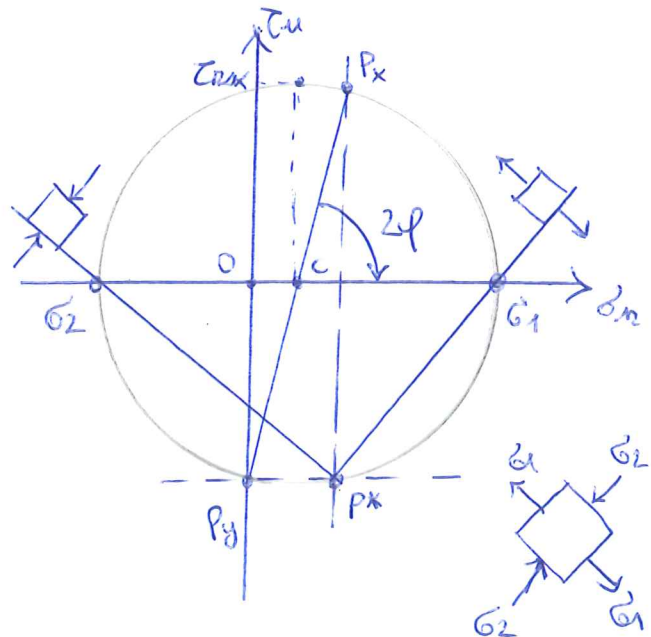
cerchio di Mohr:

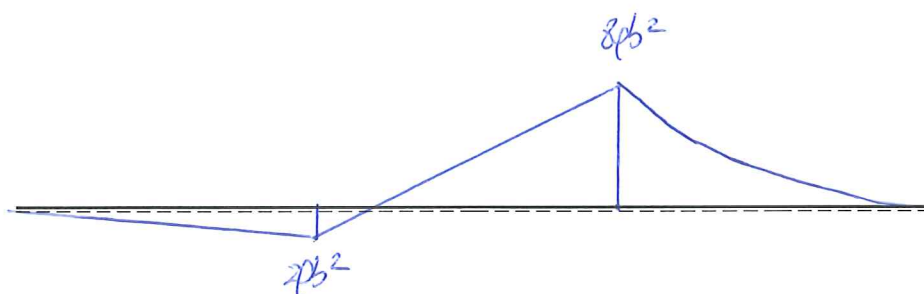
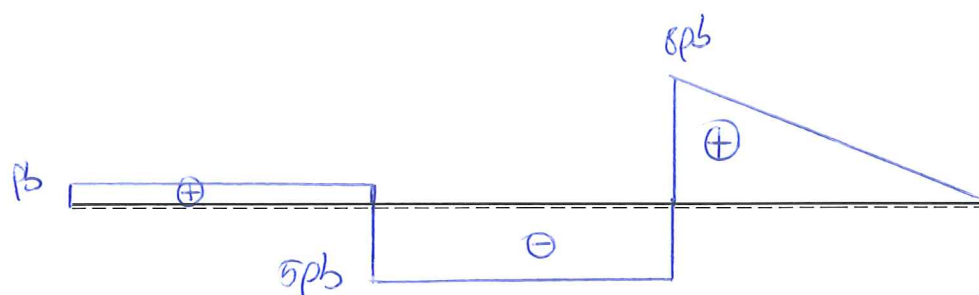
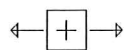


$$P_x = (25,000; 43,013)$$

$$P_y = (0,000; -43,013)$$

$$\varphi = -36,848^\circ;$$





$V_A(\uparrow) = 3pb$; $V_B(\uparrow) = -5pb$; $V_C(\uparrow) = 13pb$; $H_D(\Rightarrow) = 3pb$; $M_B(\curvearrowright) = 2pb^2$;

$N_{AB} = 3pb$; $T_{AB} = pb$; $M_{AB} = pb \times 1$;

$N_{BC} = 3pb$; $T_{BC} = -5pb$; $M_{BC} = 2pb^2 - 5pb \times 2$;

$N_{DC} = 3pb$; $T_{DC} = 4pb$; $M_{DC} = -2pb \times 3$;

$\varphi_A = -\frac{2pb^3}{3EI} \quad (D)$